DOUA ABORDARI ALE PROBLEMEI POTENTIALULUI HIDRODINAMIC

Prof.dr.mat. V. Prepelita* **As.drd.mat. M.Parvan***

**Universitatea Politehnica Bucuresti*
Splaiul Independentei 313, Bucuresti, Romania

Cuvinte-cheie: *potential hidrodinamic, potential electric, potential termic, moment multipolar*

IPOTEZE

Consideram miscarea lichidului irotationala, adica $rot\vec{v} = 0$ deci exista o functie scalara Φ astfel incat $\vec{v} = -grad\Phi$ caci $rot\ grad\ \Phi = 0$; campul fortelor exterioare e nul; miscarea e stationara adica $\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0$; $\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} = 0$; admitem ca lichidul este incompresibil adica ρ=constant; din ecuatia de continuitate $\frac{\partial}{\partial t}\rho + div(\rho\vec{v}) = 0$ avem ca $div\ \vec{v} = 0$ dar $\vec{v} = -grad\ \Phi$ deci $div(grad\Phi) = \nabla \cdot (\nabla\Phi) = \Delta\Phi = 0$ adica tocmai ecuatia Laplace pentru potentialul scalar al vitezei. Acum urmand sugestia din celebra carte Hydrodynamics a lui H. Lamb aparuta la Londra la inceputul secolului trecut, introducem termini de sursa de debit (izvor) in membrul drept si obtinem ecuatia Poisson in locul ecuatiei Laplace. Notam abuziv, si fara legatura cu densitatea lichidului, tot cu ρ densitatea volumica a sursei de debit extinsa spatial. Am ajuns la o problema de potential de volum specifica teoriei clasice a campurilor vectoriale. Se constata ca ecuatiile sunt identice pentru toate problemele de potential de volum: electric, termic, hidrodinamic; din partea electrica importam in hidraulica teoria mai pusa la punct.

PROBLEMA

Consideram o repartitie localizata a surselor de debit $\rho(\vec{r})$ functie care este nula in exeriorul domeniului V (supp ρ ⊂ V). Ecuatia potentialului hidrodinamic este tocmai:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\rho\left(\vec{r}\right) \tag{1}$$

Solutia (Vladimirov, 1987) este data de convolutia solutie fundamentale a operatorului Laplace (care este 1/R deoarece $\Delta\frac{1}{R} = -4\pi\delta\left(\vec{r} - \vec{r}'\right)$ unde $R = \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|$ si r' ≤ r) cu membrul drept al ecuatiei Poisson (1).

Notat prin:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R} * \rho\right) \tag{2}$$

Convolutia este definite ca o integrala:

$$\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho\left(\vec{r}'\right)}{R}dV \tag{2'}$$

Utilizand proprietatea de filtrare a distributiei Dirac :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

putem verifica ca (2') este solutie a ecuatiei (1):

$$\Delta\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi}\Delta\left(\int \frac{\rho\left(\vec{r}'\right)}{R}dV'\right) = \frac{1}{4\pi}\int \rho\left(\vec{r}'\right)\left(\Delta\frac{1}{R}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int \rho\left(\vec{r}'\right)\left[-4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\right]dV' = -\rho\left(\vec{r}\right)$$

PRIMA ABORDARE

In prima abordare pentru dezvoltarea in serie a lui 1/R , se utilizeaza functia generatoare a polinoamelor Legendre :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\xi+\alpha^2}} = \sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l P_l(\xi)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} = \frac{1}{\left(r^2+r'^2-2rr'\cos\Omega\right)^{1/2}} =$$
$$= \frac{1}{r}\frac{1}{\left[1-2\frac{r}{r'}\cos\Omega+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{1/2}} = \tag{3}$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\Omega)$$

unde Ω este unghiul dintre $\vec{r}$ si $\vec{r}'$, r' ≤ r.

Teorema sumarii functiilor sferice furnizeaza:

$$P_l(\cos\Omega) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\overline{Y_l}^{(m)}(\theta,\varphi)Y_l^m(\theta',\varphi') \tag{4}$$

Introducind (4) in (3') obtinem:

$$\frac{1}{R} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}(r')^l\,\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\overline{Y_l}^{(m)}(\theta,\varphi)Y_l^{(m)}(\theta',\varphi') \tag{5}$$

Introducind (5) in expresia integrala a potentialului (2') obtinem:

$$\Phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,\overline{Y_l}^{(m)}(\theta,\varphi)\ldots \ldots\int\rho\left(\vec{r}'\right)(r')^l\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_l^{(m)}(\theta',\varphi')dV' \tag{6}$$

Notam

$$Q_m^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int\rho\quad(\vec{r}')(r')^l\,Y_l^{(m)}(\theta\ ',\varphi\ ')\ dV' \tag{7}$$

Astfel expresia potentialului devine

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \ \ \varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_m^{(l)} \overline{Y}_l^{(m)}(\theta \ \ ,\varphi \ \ ) \tag{8}$$

Acesta este un rezultat clasic (vezi (Titeica, 1975), (Burlacu, 1983), (Teodorescu, 1989), (Jackson, 1974)).

O NOUA PERSPECTIVA ASUPRA ACESTUI REZULTAT

Consideram functiile sferice ca fiind tensori de tipul $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 1-data covariant si 1-data contravariant, deoarece:

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{i m \varphi}$$

unde l = 0, 1, 2, 3,... and m = -l, -l+1,..., -1, 0, 1, 2..., +l, si functiile Legendre associate sunt

$$P_l^m(\xi) = \left(1 - \xi^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi)$$

si polinoamele Legendre sunt

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l \, l!} \frac{d^l}{d\xi^l} \left(\xi^2 - 1\right)^l \qquad -1 \le \xi \le 1$$

Consideram in continuare momentul multipolar ca un tensor 1-data covariant si 1-data contravariant, avand componentele:

$$Q_m^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho(\vec{r}\,')(r')^l \, Y_l^{(m)}(\theta', \varphi') dV'$$

Acum putem expriama potentialul (8) ca o serie dubla de produse de perechi de tensori, care reprezinta tocmai o contractie de tensori:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{1}{r^l} Q_m^{(l)} \otimes Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) \frac{1}{r} \tag{8'}$$

Observatii:

- rezultatul produsului tensorilor este un scalar, deoarece indicii repetitive devin indici muti
- Aceasta este correct, deoarece potentialul $\Phi(\vec{r})$ din membrul stang al (8') este un scalar.
- factorul $\frac{1}{r^l}$ apare deoarece aici avem tensori intr-un system de coordinate sferic, nu tensori cartezieni, deci apar neliniaritati puternice.
- $\frac{1}{r}$ provine natural ca factor comun deoarece pentru l=0 , $\Phi\left(\vec{r}\right)$ este de ordinul 1/r , un fapt binecunoscut din fizica clasica elementara.
- Coeficintul $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}$ provine dintr-o conditie de normare.

A DOUA ABORDARE

In aceasta abordare pentru dezvoltrea in serie a lui 1/R , se utilizeaza dezvoltarea in serie Taylor pentru o functie de mai multe variabile:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{|\vec{r}|}+\frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial x_i'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\bigg|_{x_i'}\bullet x_i'+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x_i'\partial x_j'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\bigg|_{x_i',x_j'=0}\bullet x_i'x_j'+\dots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x_{i_1}'\dots\dots x_{i_n}'\partial_{i_1}'\dots\dots\partial_{i_n}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\bigg|_{\vec{r}'=0}$$
$$i_j=\overline{1,3}\ j=\overline{1,n} \tag{9}$$

Calcule in continuare:

$$\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\bigg|_{\vec{r}'=0}=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\bigg|_{\vec{r}'=0}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|\vec{r}|}=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}$$

Obtinem

$$\frac{1}{R}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x_{i_1}'\dots x_{i_n}'\partial_{i_1}\dots\partial_{i_n}\frac{1}{r}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\vec{r}'\bullet\nabla)^n\frac{1}{r} \tag{9'}$$

Si utilizand (2')

$$\Phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int\rho(\vec{r}')(\vec{r}'\bullet\nabla)^n\frac{1}{r}dV' \tag{10}$$

Comentariu:

Produsul scalar dintre o variabila vectoriala libera $\vec{r}'$ si operatorul diferential vectorial ∇ este $\left(\vec{r}'\bullet\nabla\right)$.

Notam prin

$$(\vec{r}'\bullet\nabla)^n=(\vec{r}')^n\otimes\nabla^n=x_{i_1}'\dots\dots x_{i_n}'\partial_{i_1}\dots\dots\partial_{i_n}$$
$$i_j=\overline{1,3}\ j=\overline{1,n}$$

produsul tensorial.

Cu aceste notatii rescriem expresia (10) sub forma

$$\Phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int(\vec{r}')^n\rho(\vec{r}')dV'\otimes\nabla^n\frac{1}{r} \tag{11}$$

Mai departe notam prin

$$M_n^{'} = \int (\vec{r}')^n \rho(\vec{r}') dV'$$

momentul multipolar de ordin n, care este un tensor avand componentele:

$$M'_{i_1 \ldots\ldots i_n} = \int x_{i_1}^{'} \ldots\ldots x_{i_n}^{'} \rho(\vec{r}') dV'$$

In final

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(M_n^{'} \otimes \nabla^n\right) \frac{1}{r} \quad (12)$$

Concluzii

Pentru rezolvarea problemei potentialului de volum a fost utilizat ata un system de coordinate sferic , cat si unul carezian.Rezultatele (8') si (12) au foarte multe in comun, ambele fiind expresii formate din serii de tensori contractati. Pentru fiecare termen al seriilor, primul tensor este tocmai momntul multipolar de ordin (n) sau (l) .

References

1. Titeica, S., 1975. *Fizica.* Note de curs Universitatea Bucuresti
2. Burlacu, L., 1983. *Mecanica analitica sia mediilor deformabile.* Note de curs, Universitatea Bucuresti
3. Teodorescu, V., 1989. *Ecuatiile fizicii matematice*, Universitatea Bucuresti
4. Jackson, J.D., 1974. *Classical Electrodynamics*, Berkley University
5. Vladimirov, V.S., 1975. *Equations of Mathematical Physics*, Moscow Ed.