

DOUA ABORDARI ALE PROBLEMEI POTENTIALULUI HIDRODINAMIC

Prof.dr.mat. V. Prepelita* As.drd.mat. M.Parvan*

**Universitatea Politehnica Bucuresti
Splaiul Independentei 313, Bucuresti, Romania*

Cuvinte-cheie: *potential hidrodinamic, potential electric, potential termic, moment multipolar*

IPOTEZE

Consideram miscarea lichidului irrotatională, adică $rot \vec{v} = 0$ deci există o funcție scalară Φ astfel încât $\vec{v} = -grad \Phi$ caci $rot grad \Phi = 0$; câmpul forțelor exterioare e nul; mișcarea e staționară adică $\frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$; $\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = 0$; admitem că lichidul este incompresibil adică $\rho = constant$; din ecuația de continuitate $\frac{\partial}{\partial t} \rho + div(\rho \vec{v}) = 0$ avem că $div \vec{v} = 0$ dar $\vec{v} = -grad \Phi$ deci $div(grad \Phi) = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = \Delta \Phi = 0$ adică tocmai ecuația Laplace pentru potențialul scalar al vitezei. Acum urmând sugestia din celebra carte Hydrodynamics a lui H. Lamb apărută la Londra la începutul secolului trecut, introducem termeni de sursă de debit (izvor) în membrul drept și obținem ecuația Poisson în locul ecuației Laplace. Notăm abuziv, și fără legătură cu densitatea lichidului, tot cu ρ densitatea volumică a sursei de debit extinsă spațial. Am ajuns la o problemă de potențial de volum specifică teoriei clasice a câmpurilor vectoriale. Se constată că ecuațiile sunt identice pentru toate problemele de potențial de volum: electric, termic, hidrodinamic; din partea electrică importăm în hidraulică teoria mai pusă la punct.

PROBLEMA

Considerăm o repartiție localizată a surselor de debit $\rho(\vec{r})$ funcție care este nulă în exteriorul domeniului V (supp $\rho \subset V$). Ecuația potențialului hidrodinamic este tocmai:

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) \tag{1}$$

Soluția (Vladimirov, 1987) este dată de convoluția soluției fundamentale a operatorului Laplace (care este $1/R$ deoarece $\Delta \frac{1}{R} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ unde $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ și $r' \leq r$) cu membrul drept al ecuației Poisson (1).

Notat prin:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R} * \rho \right)$$

(2)

Convoluția este definită ca o integrală:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV \tag{2'}$$

Utilizând proprietatea de filtrare a distribuției Dirac :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

putem verifica ca (2') este solutie a ecuatiei (1):

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \Delta \left[\int \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \right] = \frac{1}{4\pi} \int \rho(\vec{r}') \left(\Delta \frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \rho(\vec{r}') \left[-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}') \right] dV' = -\rho(\vec{r}) \end{aligned}$$

PRIMA ABORDARE

In prima abordare pentru dezvoltarea in serie a lui 1/R , se utilizeaza functia generatoare a polinoamelor Legendre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\xi+\alpha^2}} &= \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l P_l(\xi) \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\Omega)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\left[1-2\frac{r'}{r}\cos\Omega + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right]^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\Omega) \end{aligned} \tag{3}$$

unde Ω este unghiul dintre \vec{r} si \vec{r}' , $r' \leq r$.

Teorema sumarii functiilor sferice furnizeaza:

$$P_l(\cos\Omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \bar{Y}_l^{(m)}(\theta, \varphi) Y_l^{(m)}(\theta', \varphi') \tag{4}$$

Introducind (4) in (3') obtinem:

$$\frac{1}{R} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} (r')^l \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \bar{Y}_l^{(m)}(\theta, \varphi) Y_l^{(m)}(\theta', \varphi') \tag{5}$$

Introducind (5) in expresia integrala a potentialului (2') obtinem:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \bar{Y}_l^{(m)}(\theta, \varphi) \dots \int \rho(\vec{r}') (r')^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^{(m)}(\theta', \varphi') dV' \tag{6}$$

Notam

$$Q_m^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho(\vec{r}') (r')^l Y_l^{(m)}(\theta', \varphi') dV' \tag{7}$$

Astfel expresia potentialului devine

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Q_m^{(l)} \bar{Y}_l^{(m)}(\theta, \varphi) \quad (8)$$

Acesta este un rezultat clasic (vezi (Titeica, 1975), (Burlacu, 1983), (Teodorescu, 1989), (Jackson, 1974)).

O NOUA PERSPECTIVA ASUPRA ACESTUI REZULTAT

Consideram functiile sferice ca fiind tensori de tipul $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 1-data covariant si 1-data contravariant, deoarece:

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

unde $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ and $m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, +l$, si functiile Legendre asociate sunt

$$P_l^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi)$$

si polinoamele Legendre sunt

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

Consideram in continuare momentul multipolar ca un tensor 1-data covariant si 1-data contravariant, avand componentele:

$$Q_m^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho(\vec{r}') (r')^l Y_l^{(m)}(\theta', \varphi') dV'$$

Acum putem expriama potentialul (8) ca o serie dubla de produse de perechi de tensori, care reprezinta tocmai o contractie de tensori:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{1}{r^l} Q_m^{(l)} \otimes Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) \frac{1}{r} \quad (8')$$

Observatii:

- rezultatul produsului tensorilor este un scalar, deoarece indicii repetitive devin indici muti
- Aceasta este correct, deoarece potentialul $\Phi(\vec{r})$ din membrul stang al (8') este un scalar.
- factorul $\frac{1}{r^l}$ apare deoarece aici avem tensori intr-un system de coordonate sferic, nu tensori cartezieni, deci apar neliniaritati puternice.
- $\frac{1}{r}$ provine natural ca factor comun deoarece pentru $l=0$, $\Phi\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ este de ordinul $1/r$, un fapt binecunoscut din fizica clasica elementara.
- Coeficientul $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}$ provine dintr-o conditie de normare.

A DOUA ABORDARE

In aceasta abordare pentru dezvoltarea in serie a lui $1/R$, se utilizeaza dezvoltarea in serie Taylor pentru o functie de mai multe variabile:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{x'_i=0} \bullet x'_i + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{x'_i, x'_j=0} \bullet x'_i x'_j + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x'_1 \dots x'_n \partial'_1 \dots \partial'_n \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{\vec{r}'=0} \\ & \quad i_j = \overline{1,3} \quad j = \overline{1,n} \end{aligned} \tag{9}$$

Calcula in continuare:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Big|_{\vec{r}'=0} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \Big|_{\vec{r}'=0} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r}|} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Obtinem

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x'_1 \dots x'_n \partial'_1 \dots \partial'_n \frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\vec{r}' \bullet \nabla)^n \frac{1}{r} \tag{9'}$$

Si utilizand (2')

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int \rho(\vec{r}') (\vec{r}' \bullet \nabla)^n \frac{1}{r} dV' \tag{10}$$

Comentariu:

Produsul scalar dintre o variabila vectoriala libera \vec{r}' si operatorul diferential vectorial ∇ este $(\vec{r}' \bullet \nabla)$.

Notam prin

$$(\vec{r}' \bullet \nabla)^n = (\vec{r}')^n \otimes \nabla^n = x'_1 \dots x'_n \partial_1 \dots \partial_n$$

$$i_j = \overline{1,3} \quad j = \overline{1,n}$$

produsul tensorial.

Cu aceste notatii rescriem expresia (10) sub forma

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int (\vec{r}')^n \rho(\vec{r}') dV' \otimes \nabla^n \frac{1}{r} \tag{11}$$

Mai departe notam prin

$$M'_n = \int (\vec{r}')^n \rho(\vec{r}') dV'$$

momentul multipolar de ordin n, care este un tensor avand componentele:

$$M'_{i_1, \dots, i_n} = \int x'_{i_1} \dots x'_{i_n} \rho(\vec{r}') dV'$$

In final

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (M'_n \otimes \nabla^n) \frac{1}{r} \quad (12)$$

Concluzii

Pentru rezolvarea problemei potentialului de volum a fost utilizat ata un system de coordonate sferic , cat si unul carezian.Rezultatele (8') si (12) au foarte multe in comun, ambele fiind expresii formate din serii de tensori contractati. Pentru fiecare termen al seriilor, primul tensor este tocmai momntul multipolar de ordin (n) sau (l) .

References




1. Titeica, S., 1975. *Fizica*. Note de curs Universitatea Bucuresti
2. Burlacu, L., 1983. *Mecanica analitica sia mediilor deformabile*. Note de curs, Universitatea Bucuresti
3. Teodorescu, V., 1989. *Ecuatiile fizicii matematice*, Universitatea Bucuresti
4. Jackson, J.D., 1974. *Classical Electrodynamics*, Berkley University
5. Vladimirov, V.S., 1975. *Equations of Mathematical Physics*, Moscow Ed.



**HIDRAULICA
U M PLOPENI S.A.**

Str.Republicii nr.1,105900-PLOPENI-PRAHOVA R O M Ă N I A
Tel/Fax : +40-(0)244-221.392; +40-(0)244-221.350
+40-(0)244-220.862; +40-(0)244-221.351
e-mail: marketing@hidraulica-ph.ro www.hidraulica-ph.ro



Pompe simple cu roți dințate

	PRD 1	Cilindree [cm3/rot]	: 1 + 8
		Pres.max.regim permanent [bar]	: 210+150
	PRD 2	Cilindree [cm3/rot]	: 4 + 26
		Pres.max.regim permanent [bar]	: 250 - 140
	PRD 3	Cilindree [cm3/rot]	: 22,5+70
		Pres.max.regim permanent [bar]	: 180+140

Pompe duble cu roți dințate

PRD 22	Presiune [bar]:	până la 210	
	Cilindree [cmc/rot]:	26 - 4	
	Turație max. [rot/min]	4000 - 2500	
PRD 32	Presiune [bar]:	180 - 250	
	Cilindree [cmc/rot]:	70 - 4	
	Turație max. [rot/min]	3000 - 2000	

Pompe triple cu roți dințate

	PRD 322	Presiune [bar]:	până la 250
		Cilindree [cmc/rot]:	70 - 4
		Turație max. [rot/min]	3000 - 2000
	PRD 332	Presiune [bar]:	180 - 250
		Cilindree [cmc/rot]:	70 - 4
		Turație max. [rot/min]	3000 - 2000


Pompe și motoare cu pistoane axiale F1A

Presiune [bar]:	până la 350	
Cilindree [cmc/rot]:	6,5 + 468	
Turație max. [rot/min]	4000 + 1200	

Pompe cu debit reglabil tip F2-circuit deschis, închis și semideschis

	Presiune [bar]:	până la 350
	Cilindree [cmc/rot]:	14 + 468
	Turație max. [rot/min]	3000 + 1000


Pompe duble reglabile tip F4 circuit deschis

	Presiune [bar]:	până la 350
	Cilindree [cmc/rot]:	2 x 31 + 2 x 125
	Turație max. [rot/min]:	3000 + 1800

Motoare variabile cu reglare frontală tip F6A

	Presiune [bar]:	până la 350
	Cilindree [cmc/rot]:	31,1 + 250
	Turație max. [rot/min]:	3800 + 1500

Pompe cu pistoane axiale tip PM - 00

	Volum geometric [cmc/rot]:	50
	Presiunea nominală [bar]:	150
	Număr pistoane:	6
	Turație maximă [rot/min]:	1200

Cilindri hidraulici



- Cilindri cu piston cu dublu efect
- Cilindri cu plunjer
- Cilindri telescopici

Execuțăm orice tip de cilindri hidraulici după documentația beneficiarului.

Presiunea de lucru = 175 bar
Presiunea maximă = 200 bar